BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2015

УДК 517.977

ИССЛЕДОВАНИЕ КВАЗИОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Э.А.ГАРАЕВА[**], К.Б.МАНСИМОВ[*, **]

[*]Бакинский Государственный Университет

[**]Институт Систем Управления НАН Азербайджана

mansimov@front.ru

Изучается одна дискретная задача оптимального управления занимающееся промежуточное положение между дискретными задачами оптимального управления с сосредоточенными и с распределенными параметрами. Получены линеаризованные и квадратичные необходимые условия оптимальности.

Ключевые слова: дискретная система, линеаризованное условие максимума, аналог уравнения в вариациях, необходимое условие оптимальности квазиособых управлений.

В работах [1, 2] нами рассматривалась одно задача оптимального управления дискретными системами, и были получены ряд необходимых условий оптимальности первого порядка, а в случае открытости области управления выведены необходимые условия оптимальности второго порядка. В предлагаемой работе для задачи из [1, 2] изучен случай выпуклой области управления. Получен аналог линеаризованного условия максимума. Установлено необходимое условие оптимальности квазиособых управлений.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u,v)=\varphi_1(y(x_1))+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\varphi_2(x,z(t_1,x)) \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered}
u(t)\in U\subset R^r,\quad t\in T=\{t_0,t_0+1,\dots,t_1-1\},\\
v(x)\in V\subset R^q,\quad x\in X=\{x_0,x_0+1,\dots,x_1-1\},
\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$z(t+1,x)=f(t,x,z(t,x),u(t)),\ t\in T,\ x\in X\cup x_1,$$

$$z(t_0,x)=y(x),\quad x\in X\cup x_1,$$

$$y(x+1)=g(x,y(x),v(x)),\quad x\in X,$$
$$y(x_0)=y_0.$$

Здесь $f(t,x,z,u)$ $(g(x,y,v))$ – заданная n-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,u) $((y,v))$ до второго порядка включительно, t_0, t_1, x_0, x_1 – заданы, причем разности t_1-t_0 и x_1-x_0 есть натуральные числа, y_0 – заданный постоянный вектор, $\varphi_1(y)$ $(\varphi_2(x,z))$ - заданная скалярная функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по y (z) до второго порядка включительно, $u(t)$ $(v(x))$ – r (q)-мерный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и выпуклого множества U (V), т.е.

$$\begin{aligned}&u(t)\in U\subset R^r,\quad t\in T,\\&v(x)\in V\subset R^q,\quad x\in X.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Пару $(u(t),v(x))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Допустимое управление $(u(t),v(x))$, доставляющее минимум функционалу (2.1) при ограничениях (2.2), (2.3), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t),v(x),z(t,x),y(x))$ − оптимальным процессом.

Вычисление приращение функционала качества. Считая $(u^o(t),v^o(x),z^o(t,x),y^o(x))$ − фиксированным, а $(\bar u(t)=u^o(t)+\Delta u(t),$ $\bar v(x)=v^o(x)+\Delta v(x),\bar z(t,x)=z^o(t,x)+\Delta z(t,x),\bar y(x)=y^o(x)+\Delta y(x))$ − произвольным допустимым процессом, запишем приращение функционала качества.

$$\Delta S(u^o,v^o)=S(\bar u,\bar v)-S(u^o,v^o)=\frac{\partial\varphi_1'(y^o(x_1))}{\partial y}\Delta y(x_1)+\frac{1}{2}\Delta y'(x_1)\frac{\partial^2\varphi_1(y^o(x_1))}{\partial y^2}\times$$
$$\times\Delta y(x_1)+o_1\left(\|\Delta y(x_1)\|^2\right)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\frac{\partial\varphi_2'(x,z^o(t_1,x))}{\partial z}\Delta z(t_1,x)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_2(x,z^o(t_1,x))}{\partial z^2}\Delta z(t_1,x)+o_2\left(\|\Delta z(t_1,x)\|^2\right)\right].\tag{3.1}$$

При этом ясно, что приращение $(\Delta z(t,x),\Delta y(x))$ состояния $(z^o(t,x),y^o(x))$ будет решением задачи

$$\Delta z(t+1,x)=f(t,x,\bar z(t,x),\bar u(t))-f(t,x,z(t,x),u(t)),\tag{3.2}$$
$$\Delta z(t_0,x)=\Delta y(x),\tag{3.3}$$
$$\Delta y(x+1)=g(x,\bar y(x),\bar v(x))-g(x,y(x),v(x)),\tag{3.4}$$

$$\Delta y(x_0) = 0\,. \tag{3.5}$$

Пусть $\left(p^o(t,x), q^o(x)\right)$ пока неизвестная $(n+n)$ мерная вектор-функция. Тогда из (3.2), (3.4), соответственно, получаем, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{o'}(t,x)\Delta z(t+1,x) =$$
$$= \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[H\left(t,x,\bar z(t,x),\bar u(t), p^o(t,x)\right) - H\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t), p^o(t,x)\right)\right], \tag{3.6}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{o'}(x)\Delta y(x+1) =$$
$$= \sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[M\left(x,\bar y(x),\bar v(x),q^o(x)\right) - M\left(x,y^o(x),v^o(x),q^o(x)\right)\right]. \tag{3.7}$$

Здесь по определению

$$H\left(t,x,z,u,p^o\right) = p^{o'}\, f(t,x,z,u),$$
$$M\left(x,y,v,q^o\right) = q^{o'}\, g(x,y,v).$$

Далее нетрудно показать, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{o'}(t,x)\Delta z(t+1,x) = \tag{3.8}$$
$$= \sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[p^{o'}(t_1-1,x)\Delta z(t_1,x) - p^{o'}(t_0-1,x)\Delta z(t_0,x)\right] + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{o'}(t-1,x)\Delta z(t,x),$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{o'}(x)\Delta y(x+1) = q^{o'}(x_1-1)\Delta y(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{o'}(x-1)\Delta y(x). \tag{3.9}$$

С учетом тождеств (3.6)-(3.9) формула приращения (3.1) записывается в виде

$$\Delta S\left(u^o,v^o\right) = \frac{\partial\varphi_1'\left(y^o(x_1)\right)}{\partial y}\Delta y(x_1) + \frac{1}{2}\Delta y'(x_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(y^o(x_1)\right)}{\partial y^2}\Delta y(x_1) +$$
$$+ o_1\left(\left\|\Delta y(x_1)\right\|^2\right) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\frac{\partial\varphi_2'\left(x,z^o(t_1,x)\right)}{\partial z}\Delta z(t_1,x) + \frac{1}{2}\Delta z'(t_1,x)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial^2\varphi_2\left(x,z^o(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\Delta z(t_1,x) + o_2\left(\left\|\Delta z(t_1,x)\right\|^2\right)\right] +$$
$$+ \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{o'}(t_1-1,x)\Delta z(t_1,x) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{o'}(t_0-1,x)\Delta y(x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{o'}(t-1,x)\Delta z(t,x) -$$
$$- \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[H\left(t,x,\bar z(t,x),\bar u(t), p^o(t,x)\right) - H\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t), p^o(t,x)\right)\right] +$$

$$+q^{o'}(x_1-1)\Delta y(x_1)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{o'}(x-1)\Delta y(x)-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[M\left(x,\bar{y}(x),\bar{v}(x),q^o(x)\right)-M\left(x,y^o(x),v^o(x),q^o(x)\right)\right].$$

Отсюда, используя формулу Тейлора будем иметь

$$\Delta S(u^o,v^o)=\frac{\partial\varphi_1'\left(y^o(x_1)\right)}{\partial y}\Delta y(x_1)+\frac{1}{2}\Delta y'(x_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(y^o(x_1)\right)}{\partial y^2}\Delta y(x_1)+o_1\left(\left\|\Delta y(x_1)\right\|^2\right)+$$

$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\frac{\partial\varphi_2'\left(x,z^o(t_1,x)\right)}{\partial z}\Delta z(t_1,x)+\frac{1}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_2\left(x,z^o(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\Delta z(t_1,x)+$$

$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_2\left(\left\|\Delta z(t_1,x)\right\|^2\right)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{o'}(t_1-1,x)\Delta z(t_1,x)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{o'}(t_0-1,x)\Delta y(x)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[H_u'\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),p^o(t,x)\right)\Delta u(t,x)+\right.$$

$$\left.+H_z'\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),p^o(t,x)\right)\Delta z(t,x)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\Delta z'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),p^o(t,x)\right)\Delta z(t,x)+\right.$$

$$+2\Delta u'(t)H_{uz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),p^o(t,x)\right)\Delta z(t,x)+\Delta u'(t)\times \tag{3.10}$$

$$\left.\times H_{uu}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),p^o(t,x)\right)\Delta u(t)\right]+q^{o'}(x_1-1)\Delta y(x_1)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1} q^{o'}(x-1)\Delta y(x)-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[M_v'\left(x,y^o(x),v^o(x),q^o(x)\right)\Delta v(x)+M_y'\left(t,x,y^o(x),v^o(x),q^o(x)\right)\Delta y(x)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\Delta y'(x)M_{yy}\left(x,y^o(x),v^o(x),q^o(x)\right)\Delta y(x)+2\Delta v'(x)\times\right.$$

$$\left.\times M_{vy}\left(x,y^o(x),v^o(x),q^o(x)\right)\Delta y(x)+\Delta v'(x)M_{vv}\left(x,y^o(x),v^o(x),q^o(x)\right)\Delta v(x)\right]-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_3\left(\left[\left\|\Delta z(t,x)\right\|+\left\|\Delta u(t)\right\|\right]^2\right)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_4\left(\left[\left\|\Delta y(x)\right\|+\left\|\Delta v(x)\right\|\right]^2\right).$$

Если предполагать, что $p^o(t,x)$, $q^o(x)$ являются решениями следующих задач, соответственно

$$p^o(t-1,x)=H_z\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),p^o(t,x)\right), \tag{3.11}$$

$$p^o(t_1-1,x)=-\frac{\partial\varphi_2\left(x,z^o(t_1,x)\right)}{\partial z}, \tag{3.12}$$

$$q^o(x-1)=-M_y\left(x,y^o(x),v^o(x),q^o(x)\right)+p^o(t_0-1,x), \tag{3.13}$$

$$q^o(x_1-1)=-\frac{\partial\varphi_1(y^o(x_1))}{\partial y}, \tag{3.14}$$

то формула приращения (3.10) примет вид

$$\Delta S(u^o,v^o)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}H'_u(t,x,z^o(t,x),u^o(t),p^o(t,x))\Delta u(t)-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}M'_v(x,y^o(x),v^o(x),q^o(x))\Delta v(x)+ \tag{3.15}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\Delta y'(x_1)\frac{\partial^2\varphi_1(y^o(x_1))}{\partial y^2}\Delta y(x_1)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_2(x,z^o(t_1,x))}{\partial y^2}\Delta z(t_1,x)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\Delta z'(t,x)H_{zz}(t,x,z^o(t,x),u^o(t),p^o(t,x))\Delta z(t,x)+\right.$$

$$+2\,\Delta u'(t)H_{uz}(t,x,z^o(t,x),u^o(t),p^o(t,x))\Delta z(t,x)+$$

$$\left.+\Delta u'(t)H_{uu}(t,x,z^o(t,x),u^o(t),p^o(t,x))\Delta u(t)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\Delta y'(x)M_{yy}(x,y^o(x),v^o(x),q^o(x))\Delta y(x)+2\Delta v'(x)\times\right.$$

$$\left.\times M_{vy}(x,y^o(x),v^o(x),q^o(x))\Delta y(x)+\Delta v'(x)M_{vv}(x,y^o(x),v^o(x),q^o(x))\Delta v(x)\right]+$$

$$+o_1\left(\|\Delta y(x_1)\|^2\right)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}o_2\left(\|\Delta z(t_1,x)\|^2\right)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}o_3\left([\|\Delta z(t,x)\|+\|\Delta u(t)\|]^2\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}o_4\left([\|\Delta y(x)\|+\|\Delta v(x)\|]^2\right).$$

Перейдем к оценке нормы приращения состояния $(z(t,x),y(x))$. Ясно, что

$$\Delta z(t+1,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t}[\Delta z(\tau+1,x)-\Delta z(\tau,x)]+\Delta z(t_0,x).$$

Отсюда, с учетом (3.2) имеем

$$\Delta z(t+1,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\left\{\left[f(\tau,x,\bar z(\tau,x),\bar u(\tau))-f(\tau,x,z^o(\tau,x),u^o(\tau))\right]-\Delta z(\tau,x)\right\}+$$

$$+\Delta z(t_0,x).$$

Используя условие Липшица имеем

$$\|\Delta z(t+1,x)\|\le L_1\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[\|\Delta z(\tau,x)\|+\|\Delta u(\tau)\|\right]+\|\Delta y(x)\|. \tag{3.16}$$

$$L_1=const>0.$$

Из (3.4)-(3.5) же следует, что

$$\Delta y(x+1) = \sum_{s=x_0}^{x} \left[\Delta y(s+1) - \Delta y(s) \right] =$$

$$= \sum_{s=x_0}^{x} \left\{ \left[g(s, \bar{y}(s), \bar{v}(s)) - g\left(s, y^o(s), v^o(s)\right) \right] - \Delta y(s) \right\}.$$

Отсюда получаем

$$\left\| \Delta y(x+1) \right\| \le L_2 \sum_{s=x_0}^{x} \left[\left\| \Delta y(s) \right\| + \left\| \Delta v(s) \right\| \right], \tag{3.17}$$

($L_2 = const > 0$).

Из неравенств (3.16), (3.17) после некоторых преобразований и применяя дискретный аналог леммы Гроноулла-Беллмана (см. напр. [4, 5]), получим оценки

$$\left\| \Delta z(t,x) \right\| \le L_3 \left[\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \left\| \Delta u(\tau) \right\| + \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \left\| \Delta v(s) \right\| \right], \tag{3.18}$$

$$\left\| \Delta y(x) \right\| \le L_4 \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \left\| \Delta v(s) \right\|, \tag{3.19}$$

$L_4 = const > 0$,

где $L_3 = const > 0$, $L_4 = const > 0$

Далее из (3.2)-(3.5) ясно, что $(\Delta z(t,x), \Delta y(x))$ является решением линеаризованной задачи

$$\begin{gathered} \Delta z(t+1,x) = f_z\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t)\right)\Delta z(t,x) + \\ + f_u\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t)\right)\Delta u(t) + o_3\left(\left\|\Delta z(t,x)\right\| + \left\|\Delta u(t)\right\|\right), \end{gathered} \tag{3.20}$$

$$\Delta z(t_0) = \Delta y(x), \tag{3.21}$$

$$\begin{gathered} \Delta y(x+1) = g_y\left(x, y^o(x), v^o(x)\right)\Delta y(x) + g_v\left(x, y^o(x), v^o(x)\right)\Delta v(x) + \\ + o_4\left(\left\|\Delta y(x)\right\| + \left\|\Delta v(x)\right\|\right), \end{gathered} \tag{3.22}$$

$$\Delta y(x_0) = 0. \tag{3.23}$$

Необходимые условия оптимальности. Перейдем к выводу необходимых условий оптимальности.

Поскольку множество U выпуклое, то специальное приращение управления $\left(u^o(t), v^o(x)\right)$ можно определить по формуле

$$\Delta u(t,\varepsilon) = \varepsilon\left[u(t) - u^o(t)\right], \tag{3.24}$$

$$\Delta v(x,\varepsilon) = 0.$$

Здесь $\varepsilon \in [0,1]$ произвольное число, $u(t) \in U$, $t \in T$ − произвольное допустимое управление.

Через $(\Delta z(t,x;\ \varepsilon),\Delta y(x;\ \varepsilon))$ обозначим специальное приращение состояния $(z^o(t,x),y^o(x))$, отвечающее специальному приращению (3.24) управления $(u^o(t),v^o(x))$.

Из оценок (3.18), (3.19) следует, что

$$\|\Delta z(t,x;\ \varepsilon)\| \sim \varepsilon, \tag{3.25}$$

$$\|\Delta y(x;\ \varepsilon)\| = 0.$$

С учетом (3.24), (3.25) из формулы приращения (3.15) получаем справедливость разложения

$$\begin{aligned}
\Delta_u S_\varepsilon(u^o,v^o) &= S(u^o(t)+\varepsilon\,\Delta u(t;\varepsilon),v^o(x)) - S(u^o(t),v^o(x)) = \\
&= -\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_u'(t,x,z^o(t,x),v^o(t),p^o(t,x))(u(t)-u^o(t)) + \qquad (3.26)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta z'(t_1,x;\ \varepsilon)\frac{\partial^2\varphi_2(z^o(t_1,x),x)}{\partial z^2}\Delta z(t_1,x;\ \varepsilon) - \\
&-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big[\Delta z'(t,x;\ \varepsilon)H_{zz}(t,x,z^o(t,x),u^o(t),p^o(t,x))\Delta z(t,x;\varepsilon) + \\
&+2\varepsilon(u(t)-u^o(t))'\,H_{uz}(t,x,z^o(t,x),u^o(t),p^o(t,x))\Delta z(t,x;\varepsilon) + \\
&+\varepsilon^2(u(t)-u^o(t))'\,H_{uu}(t,x,z^o(t,x),u^o(t),p^o(t,x))(u(t)-u^o(t))\Big] + o(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Из разложение (3.26) сразу следует, что вдоль оптимального процесса $(u^o(t),v^o(x),z^o(t,x),y^o(x))$ неравенство (линеаризованное условие максимума)

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_u'(t,x,z^o(t,x),u^o(t),p^o(t,x))(u(t)-u^o(t)) \le 0 \qquad 3.27)$$

выполняется для всех $u(t)\in U$, $t\in T$.

Далее в силу выпуклости множества V специальное приращение допустимого управления $(u^o(t),v^o(x))$ можно определить по формуле

$$\Delta v(x;\ \mu) = \mu[v(x)-v^o(x)],$$

$$\Delta u(t,x;\ \mu) = 0, \tag{3.28}$$

где $\mu\in[0,1]$ произвольное число, а $v(x)\in U$, $x\in X$ − произвольное допустимое управление.

Пусть $(\Delta z(t,x:\mu),\Delta y(x:\mu))$ есть специальное приращение состояния $(z^o(t,x),y^o(x))$, отвечающее приращению (3.28) управления $(u^o(t),v^o(x))$.

Из оценок (3.18), (3.19) следует, что

$$\|\Delta z(t,x;\ \mu)\| \sim \mu, \tag{3.29}$$

$$\|\Delta y(x;\,\mu)\| \sim \mu\,.$$

С учетом (3.28), (3.29) из формулы приращения (3.15) получим справедливость разложения

$$\Delta_v S_\mu(u^o, v^o) = S(u^o(t), v^o(x) + \Delta v(x:\mu)) - S(u^o(t), v^o(x)) =$$

$$= -\mu\sum_{x=x_0}^{x_1-1} M_v'(x, y^o(x), v^o(x), q^o(x))(v(x) - v^o(x)) + \frac{1}{2}\Delta y'(x_1;\mu)\frac{\partial^2\varphi_1(y^o(x_1))}{\partial z^2}\times$$

$$\times\Delta y(x_1;\mu) - \frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta z'(t,x;\mu)H_{zz}(t,x,z^o(t,x),u^o(t),p^o(t,x))\Delta z(t,x;\mu) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta z'(t_1,x;\,\mu)\frac{\partial^2\varphi_2(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\Delta z(t_1,x;\mu) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big[\Delta y'(x;\mu)M_{yy}(x,y^o(x),v^o(x),q^o(x))\Delta y(x;\mu) +$$

$$+2\mu(v(x)-v^o(x))'M_{vy}(x,y^o(x),v^o(x),q^o(x))\Delta y(x;\mu) +$$

$$+\mu^2(v(x)-v^o(x))'M_{vv}(x,y^o(x),v^o(x),q^o(x))(v(x)-v^o(x))\Big] + o(\mu^2). \tag{3.30}$$

Отсюда сразу следует, что вдоль оптимального процесса $(u^o(t), v^o(x), z^o(t,x), y^o(x))$ выполняется неравенство (линеаризованное условие максимума)

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} M_v'(x, y^o(x), v^o(x), q^o(x))(v(x) - v^o(x)) \le 0\,, \tag{3.31}$$

выполняется для всех $v(x)\in V$, $x\in X$.

Соотношения (3.27), (3.31) представляют собой аналог линеаризованного условия максимума.

Рассмотрим случай их вырождения.

Определение 3.1. Допустимое управление $(u^o(t), v^o(x))$ назовем квазиособым управлением, если для всех $u(t)\in U$, $t\in T$, $v(x)\in V$, $x\in X$ выполняются соотношения

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u'(t,x,z^o(t,x),u^o(t),p^o(t,x))(u(t)-u^o(t)) = 0\,, \tag{3.32}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} M_v'(x, y^o(x), v^o(x), q^o(x))(v(x) - v^o(x)) = 0\,, \tag{3.33}$$

соответственно.

Для простоты дальнейших изложений будем использовать обозначения типа

$$f_z\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t)\right)\equiv f_z(t,x),\qquad g_y\left(x,y^o(x),v^o(x)\right)\equiv g_y(x),$$
$$f_u\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t)\right)\equiv f_u(t,x),\qquad g_v\left(x,y^o(x),v^o(x)\right)\equiv g_v(x),$$
$$H_{zz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\equiv H_{zz}(t,x),$$
$$H_{uz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\equiv H_{uz}(t,x),$$
$$H_{uu}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)\equiv H_{uu}(t,x),$$
$$M_{yy}\left(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x)\right)\equiv M_{yy}(x),$$
$$M_{vy}\left(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x)\right)\equiv M_{vy}(x),\quad M_{vv}\left(x,y^o(x),v^o(x),p^o(x)\right)\equiv M_{vv}(x).$$

При помощи линеаризованной системы (3.20)-(3.23) доказывается

Лемма 3.1. Для $\Delta z(t,x;\varepsilon)$, $\Delta z(t,x;\mu)$, $\Delta y(x:\mu)$ справедливы следующие разложения

$$\Delta z(t,x;\varepsilon)=\varepsilon\,\ell_1(t,x)+o(\varepsilon:t,x),\tag{3.34}$$
$$\Delta z(t,x;\mu)=\mu\,\ell_2(t,x)+o(\mu:t,x),\tag{3.35}$$
$$\Delta y(x;\mu)=\mu\,\ell_3(x)+o(\mu:x).\tag{3.36}$$

Здесь $\ell_i(t,x)$, $i=1,2$ и $\ell_3(x)$ являются, соответственно, решениями задач

$$\ell_1(t+1,x)=f_z(t,x)\ell_1(t,x)+f_u(t,x)\left(u(t)-u^o(t)\right),\tag{3.37}$$
$$\ell_1(t_0,x)=0,\tag{3.38}$$
$$\ell_2(t+1,x)=f_z(t,x)\ell_2(t,x),\tag{3.39}$$
$$\ell_2(t_0,x)=\ell_3(x),\tag{3.40}$$
$$\ell_3(x+1)=g_y(x)\ell_3(x)+g_v(x)\left(v(x)-v^o(x)\right),\tag{3.41}$$
$$\ell_3(x_0)=0.\tag{3.42}$$

С учетом (3.34)-(3.36) из разложений (3.26), (3.30) следует следующее утверждение.

Теорема 3.1. Для оптимальности квазиособого управления $\left(u^o(t),v^o(x)\right)$ необходимо, чтобы выполнялись соотношения:

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\ell_1'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_2\left(x,z^o(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\ell_1(t_1,x)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big[\ell_1'(t,x)H_{zz}(t,x)\ell_1(t,x)+\tag{3.43}$$
$$+2\left(u(t)-u^o(t)\right)'H_{uz}(t,x)\ell_1(t,x)+\left(u(t)-u^o(t)\right)'H_{uu}(t,x)\left(u(t)-u^o(t)\right)\Big]\geq 0,$$

для всех $u(t)\in U$, $t\in T$,

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\ell_2'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_2\left(x,z^o(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\ell_2(t_1,x)+\ell_3'(x_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(y^o(x_1)\right)}{\partial z^2}\ell_2(x_1)-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\ell_2'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),p^o(t)\right)\ell_2(t,x)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big[\ell_3'(x)M_{yy}(x)\ell_3(x)+$$

$$+2\big(v(x)-v^o(x)\big)' M_{vy}(x)\ell_3(x)+\big(v(x)-v^o(x)\big)' M_{vv}(x)\big(v(x)-v^o(x)\big)\Big]\geq 0 \quad (3.44)$$

для всех $v(x)\in V$, $x\in X$.

Неравенства (3.43), (3.44) являются неявными необходимыми условиями оптимальности квазиособых управлений для рассматриваемой задачи.

Основываясь на них удается получить необходимые условия оптимальности носящие явный характер. Уравнения (3.37), (3.39), (3.41) являются линейными разностными уравнениями. Поэтому на основе формулы о представлении решений линейных разностных уравнений (см. напр. [3, 5]) имеем

$$\ell_1(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F(t,\tau;x)\,f_u(\tau,x)\big(u(\tau)-u^o(\tau)\big), \quad (3.45)$$

$$\ell_2(t,x)=F(t,t_0-1;x)\ell_3(x), \quad (3.46)$$

$$\ell_3(x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}\Phi(x,s)g_v(s)\big(v(s)-v^o(s)\big). \quad (3.47)$$

Здесь матричные функции $F(t,\tau;x)$ и $\Phi(x,s)$ являются, соответственно, решениями задач

$$F(t,\tau-1;x)=f_z(t,\tau,x)F(t,\tau;x),$$
$$F(t,t-1;x)=E, \quad (3.48)$$
$$\Phi(x,s-1)=g_y(s)\Phi(x,s),$$
$$\Phi(x,x-1)=E, \quad (3.49)$$

(E – $(n\times n)$ единичная матрица).

С учетом (3.47) представление (3.46) записывается в виде

$$\ell_2(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}Q(t,x,s)g_v(s)\big(v(s)-v^o(s)\big), \quad (3.50)$$

где по определению

$$Q(t,x,s)=F(t,t_0-1,x)\Phi(x,s).$$

Займемся преобразованием слагаемых в неравенствах (3.43), (3.44). Следуя методике предлагаемый и развитый в работах [6-9] и др. имеем

$$\ell_1'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_2\big(x,z^o(t_1,x)\big)}{\partial z^2}\ell_1(t_1,x)=\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=t_0}^{t_1-1}\big(u(\alpha)-u^o(\alpha)\big)' f_u'(\alpha,x)F'(t_1,\alpha,x)\times$$
$$\times\frac{\partial^2\varphi_2\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial x^2}F(t_1,\beta,x)\,f_u(\beta,x)\big(u(\beta)-u^o(\beta)\big), \quad (3.51)$$

$$\left(u(t)-u^o(t)\right)' H_{uz}(t,x)\ell_1(t,x)=$$

$$=\sum_{\alpha=t_0}^{t-1}\left(u(t)-u^o(t)\right)' H_{uz}(t,x)F(t,\alpha,x)\,f_u(\alpha,x)\left(u(\alpha)-u^o(\alpha)\right), \tag{3.52}$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\ell_1'(t,x)H_{zz}(t,x)\ell_1(t,x)=\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=t_0}^{t_1-1}\left(u(\alpha)-u^o(\alpha)\right)' f_u'(\alpha,x)\times$$

$$\times\left\{\sum_{t=\max(\alpha,\beta)+1}^{t_1-1}F(t,\alpha,x)H_{zz}(t,x)F(t,\beta,x)\right\} f_u(\beta,x)\left(u(\beta)-u^o(\beta)\right), \tag{3.53}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\ell_2'(t,x)H_{zz}(t,x)\ell_2(t,x)=\sum_{\ell=x_0}^{x_1-1}\sum_{m=x_0}^{x_1-1}\left(v(\ell)-v^o(\ell)\right)' g_v'(\ell)\times$$

$$\times\left[\sum_{x=\max(\ell,m)+1}^{x_1-1}Q'(t,x,\ell)H_{zz}(t,x)Q(t,x,m)\right] g_v(m)\left(v(m)-v^o(m)\right), \tag{3.54}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\ell_3'(x)M_{yy}(x)\ell_3(x)=\sum_{\ell=x_0}^{x_1-1}\sum_{m=x_0}^{x_1-1}\left(v(\ell)-v^o(\ell)\right)' g_v'(\ell)\times$$

$$\times\left\{\sum_{x=\max(\ell,m)+1}^{x_1-1}\Phi'(x,\ell)M_{yy}(x)\Phi(x,m)\right\} g_v(m)\left(v(m)-v^o(m)\right), \tag{3.55}$$

$$\ell_3'(x_1)\,\frac{\partial^2\varphi_1\left(y^o(x_1)\right)}{\partial y^2}\,\ell_2(x_1)=$$

$$=\sum_{\ell=x_0}^{x_1-1}\sum_{m=x_0}^{x_1-1}\left(v(\ell)-v^o(\ell)\right)' g_v'(\ell)\Phi'(x,\ell)\frac{\partial^2\varphi_1\left(y^o(x_1)\right)}{\partial y^2}\Phi(x_1,m)\left(v(m)-v^o(m)\right), \tag{3.56}$$

$$\left(v(x)-v^o(x)\right)M_{vy}(x)\ell_3(x)=$$

$$=\sum_{\ell=x_0}^{x-1}\left(v(x)-v^o(x)\right)' M_{vy}(x)\Phi(x,\ell)g_v(\ell)\left(v(\ell)-v^o(\ell)\right), \tag{3.57}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\ell_2'(t_1,x)\,\frac{\partial^2\varphi_1\left(x,z^o(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\,\ell_2(t_1,x)=\sum_{\ell=x_0}^{x_1-1}\sum_{m=x_0}^{x_1-1}\left(v(\ell)-v^o(\ell)\right)' g_v'(\ell)\times$$

$$\times\left\{\sum_{x=\max(\ell,m)+1}^{x_1-1}Q'(t_1,x,\ell)\,\frac{\partial^2\varphi_1\left(x,z^o(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\,Q'(t_1,x,m)\right\} g_v(m)\left(v(m)-v^o(m)\right), \tag{3.58}$$

Введем обозначения

$$M(\alpha,\beta,x)=-F'(t_1,\tau,x)\frac{\partial^2\varphi_2\left(x,z^o(t_1,x)\right)}{\partial z^2}F(t_1,\beta,x)-$$

$$-\sum_{t=\max(\tau,s)+1}^{t_1-1}F'(t,\alpha,x)H_{zz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x)\right)F(t,\beta,x), \tag{3.59}$$

$$K(\ell,m)=-\Phi'(x_1,\ell)\frac{\partial^2\varphi_1(y^o(x_1))}{\partial y^2}\Phi(x_1,m)-$$

$$-\sum_{x=\max(\ell,m)+1}^{x_1-1}\Phi'(x,\ell)F'(t_1,t_0-1,x)\,\frac{\partial^2\varphi_2(x,z^o(t_1,x))}{\partial z^2}F(t_1,t_0-1,x)\Phi(x,m)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=\max(\ell,m)+1}^{x_1-1}\Phi'(x,\ell)\,F'(t,x,t_0-1)H_{zz}(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x))\times \tag{3.60}$$

$$\times F(t,t_0-1,x)\,\Phi(x,m)+\sum_{x=\max(\ell,m)+1}^{x_1-1}\Phi'(x,\ell)\,M_{yy}(x,y^o(x),v^o(x))\,\Phi(x,m).$$

С учетом обозначений (3.59), (3.60) и тождеств (3.51)-(3.60) неравенства (3.43), (3.44) записываются, соответственно, в виде

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}(u(\tau)-u^o(\tau))\,f_u'(\tau,x,z^o(\tau,x),u^o(\tau))M(\tau,s,x)\,f_u(\tau,x,z^o(\tau,x),u^o(\tau))\times$$

$$\times(u(s)-u^o(s))+2\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}(u(t)-u^o(t))'\,H_{uz}(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x))\times\right.$$

$$\left.\times\, f_u(\tau,x,z^o(\tau,x),u^o(\tau))(u(\tau)-u^o(\tau))\right)+ \tag{3.61}$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}(u(t)-u^o(t))'\,H_{uu}(t,x,z^o(t,x),u^o(t),\psi^o(t,x))(u(t)-u^o(t))\le 0,$$

$$\sum_{\ell=x_0}^{x_1-1}\sum_{m=x_0}^{x_1-1}(v(\ell)-v^o(\ell))'\,g_v'(\tau,y^o(\tau),v^o(\tau))K(\tau,s)g_v(m,y^o(m),v(m))\times$$

$$\times(v(m)-v^o(m))+2\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{\ell=x_0}^{x-1}(v(x)-v^o(x))'\,M_{vy}(x,y^o(x),v^o(t),p^o(x))\times\right. \tag{3.62}$$

$$\left.\times\Phi(x,\ell)g_v(\ell,y^o(\ell),v^o(\ell))(u(\ell)-u^o(\ell))\right)+$$

$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}(v(x)-v^o(x))'M_{vv}(x,y^o(x),v^o(t),p^o(x))(v(x)-v^o(x))\le 0.$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 3.2. Для оптимальности квазиособого управления $(u^o(t),v^o(x))$ необходимо, чтобы неравенства (3.61), (3.62) выполнялись, соответственно, для всех $u(t)\in U$, $t\in T$, $v(x)\in V$, $x\in X$.

Соотношения (3.61), (3.62) являются довольно общими необходимыми условиями оптимальности квазиособых управлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гараева Э.А., Мансимов К.Б. Об одной дискретной задаче оптимального управления // Вестник БГУ. Сер. физ.-мат. наук, 2014, № 1, с.
2. Гараева Э.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности второго порядка в одной дискретной задаче оптимального управления //
3. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку: БГУ, 2014.
4. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.
5. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск: БГУ, 1978, 256 с.
6. Мансимов К.Б. Исследование особых процессов в задачах оптимального управления // Автореф. дисс. на соиск. уч. степени д-ра физ.-мат. наук. Баку, 1994, 36 с.
7. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: Элм, 1999, 176 с.
8. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. Баку: Элм, 2010, 363 с.
9. Марданов М.Дж., Мансимов К.Б., Меликов Т.К. Необходимые условия оптимальности второго порядка и исследование особых управлений в системах с запаздыванием. Баку: Элм, 2013, 352 с.

BİR DİSKRET OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ KVAZİMƏXSUSİ İDARƏLƏRİN TƏDQİQİ

E.A. QARAYEVA, K.B.MƏNSİMOV

XÜLASƏ

Bir spesifik diskret optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün xəttiləşdirilmiş maksimum şərti formasında zəruri şərt alınmışdır. Ayrıca olaraq bu zəruri şərtin cırlaşdığı hal (kvaziməxsusi hal) araşdırılmışdır.

Açar sözlər: diskret sistem, xəttiləşdirilmiş maksimum şərti, variasiyalı tənliyin analoqu, kvaziməxsusi idarələrin optimallığı üçün zəruri şərt.

INVESTIGATION OF QUASISINGULAR CONTROLS IN ONE DISCRETE CONTROL PROBLEM

E.A.GARAYEVA, K.B.MANSIMOV

SUMMARY

The paper considers one special optimal control problem. Necessary optimality conditions for the linearized maximum principle are obtained.

Key words: discrete systems, linearized maximum condition, analog of the variational equation, necessary optimality condition of quasisingular controls

Поступила в редакцию: 05.05.2015 г.
Подписано к печати: 17.11.2015 г.